



TITLE:

非線形発展方程式の差分近似について (発展系と自由境界問題)

AUTHOR(S):

小林, 和夫; 小林, 良和

CITATION:

小林, 和夫 ...[et al]. 非線形発展方程式の差分近似について (発展系と自由境界問題). 数理解析研究所講究録 1976, 264: 120-127

ISSUE DATE:

1976-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105836>

RIGHT:

非線形発展方程式の差分近似について

早大・理工 小林和夫

新潟大・工 小林良和

§1. 序

この小論では、時間に依在する非線形発展方程式

$$(1) \quad du(t)/dt \in A(t)u(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

を Crandall-Liggett [1], Kobayashi [3] の方法で論ずる。
但し, $\{A(t)\}_{t \in [0, T]}$ はある Banach 空間の dissipative 作用素族である。応用として、一階準線型方程式

$$(2) \quad u_t(t, x) + \phi(t, u(t, x))x = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}$$

を扱う。

§2. 非線形発展方程式

X を (実) Banach 空間とし、その norm を $\|\cdot\|$ で表わす。

$p: X \rightarrow [0, \infty]$ を $p \neq \infty$ な 下半連続 (l. s. c.) な汎関数とする。このとき

$$(3) \quad X_\alpha = \{x \in X; p(x) \leq \alpha\}, \quad X_0 = \bigcup_{\alpha > 0} X_\alpha$$

とおく。 X_α は closed である。

定理 1. $\{A(t)\}_{t \in [0, T]}$ を X の dissipative 作用素族とし、次の条件 (I), (II), (III) を仮定する。

$$(I) \quad Y = \overline{X_0} = \overline{D(A(t))} \quad (= \text{一定}), \quad t \in [0, T]$$

$$(II) \quad \lambda > 0, \quad t \in [0, T] \quad \text{のとき}, \quad R(I - \lambda A(t)) \cap X_0,$$

$$(4) \quad p(J_\lambda(t)u) \leq p(u), \quad u \in X_0.$$

但し, $J_\lambda(t) = (I - \lambda A(t))^{-1}$ とおいた。

(III) 各 $\alpha > 0$ に対して, 非減少関数 $\omega_\alpha: [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ で, $\lim_{\alpha \downarrow 0} \omega_\alpha(r) = 0$ を満たすものがあて, $u \in X_\alpha$ のとき

$$(5) \quad \|J_\lambda(s)u - J_\lambda(t)u\| \leq \lambda \omega_\alpha(|s - t|), \quad \lambda > 0, \quad s, t \in [0, T]$$

が成立する。

このとき, $u \in Y$ に対して, 極限

$$(6) \quad U(t, s)u = \lim_{\lambda \downarrow 0} \prod_{k=1}^{[t-s/\lambda]} J_\lambda(s + k\lambda)u$$

が $0 \leq s \leq t \leq T$ に対して, 一様に存在する。また, $\{U(t, s); 0 \leq s \leq t \leq T\}$ は次の性質をもつ。

$$(a) \quad U(t, s)U(s, r) = U(t, r), \quad U(s, s) = I \text{ on } Y, \quad 0 \leq r \leq s \leq t \leq T$$

$$(b) \quad U(t, s)u, \quad u \in Y, \text{ は } 0 \leq s \leq t \leq T \text{ なる } s, t \text{ につい}$$

て連続

$$(c) \quad \|U(t, s)u - U(t, s)v\| \leq \|u - v\|, \quad u, v \in Y, \quad 0 \leq s \leq t \leq T$$

$$(d) \quad p(U(t, s)u) \leq p(u), \quad u \in X_0, \quad 0 \leq s \leq t \leq T$$

この定理は次の補題により証明される。

補題 1. $u \in X_\alpha$ のとき, $k=1, 2, \dots, [T-s/\lambda]$, $\lambda > 0$ に対し

$$\rho\left(\prod_{i=1}^k J_\lambda(s+i\lambda)u\right) \leq \rho(u) \leq \alpha.$$

補題 2. $u, v \in X_\alpha$ のとき, $\lambda, \mu > 0$, $s, t \in [0, T]$ に対し

$$\|J_\lambda(s)u - J_\mu(t)v\| \leq \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \|J_\lambda(s)u - v\| + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \|J_\mu(t)v - u\| + \frac{3\lambda\mu}{\lambda+\mu} \omega_\alpha(1s-t1)$$

証明. 対称性により $\mu \leq \lambda$ としてよい。(II), (III) より

$$\begin{aligned} \|J_\lambda(s)u - J_\mu(t)v\| &\leq \|J_\lambda(s)u - J_\mu(s)v\| + \|J_\mu(s)v - J_\mu(t)v\| \\ &\leq \|J_\lambda(s)u - J_\mu(s)v\| + \mu \omega_\alpha(1s-t1) \end{aligned}$$

ところで, $A(s)$ は dissipative であるから

$$\begin{aligned} \|J_\lambda(s)u - J_\mu(s)v\| &\leq \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \|J_\lambda(s)u - v\| + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \|J_\mu(s)v - u\| \\ &\leq \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \|J_\lambda(s)u - v\| + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \|J_\mu(t)v - u\| \\ &\quad + \frac{\mu^2}{\lambda+\mu} \omega_\alpha(1s-t1) \end{aligned}$$

この二つの不等式より, 求める不等式を得る。 おわり

補題 3. $\varepsilon > 0$ とし, $\delta, \lambda, \mu > 0$ および $s, s' \in [0, T]$ を $|s-s'| < \delta \leq T/2$, $\lambda, \mu \leq \delta - |s-s'|$ を満たす数とする。このとき $u, v \in X_\alpha$, $k=1, 2, \dots, [T-s/\lambda]$, $j=1, 2, \dots, [T-s'/\mu]$ に対して, 次が成り立つ。

$$\begin{aligned} (7) \quad \left\| \prod_{i=1}^k J_\lambda(s+i\lambda)u - \prod_{i=1}^j J_\mu(s'+i\mu)v \right\| &\leq \|J_\varepsilon(0)u - u\| + \|J_\varepsilon(0)u - v\| \\ &\quad + f_{k,j} (\|A_\varepsilon(0)u\| + 3\omega_\alpha(T)) + 3j\mu \{ \delta^{-1} \omega_\alpha(T) f_{k,j} + \omega_\alpha(2\delta) \} \end{aligned}$$

但し, $f_{k,j} = \{(k\lambda - j\mu)^2 + \lambda^2 k + \mu^2 j\}^{1/2}$, $A_\varepsilon(0) = \varepsilon^{-1}(J_\varepsilon(0) - I)$ 。

略証. $a_{k,j} = \left\| \prod_{i=1}^k J_\lambda(s+i\lambda)u - \prod_{i=1}^j J_\mu(s'+i\mu)v \right\|$ とおく。補題

2 を用いれば, $a_{k,0}, a_{0,j}$ は (7) を満たすことが容易に示せる。帰納的に $a_{k-1,j}, a_{k,j-1}$ が (7) を満たしていると仮定する。再び, 補題 2 を用いれば,

$$\begin{aligned} a_{k,j} &\leq \|J_\varepsilon(0)u - u\| + \|J_\varepsilon(0)u - v\| + f_{k,j} (\|A_\varepsilon(0)u\| + 3\omega_\alpha(T)) \\ &\quad + \frac{3\lambda\mu(j-1)}{\lambda+\mu} \{ \delta^{-1}\omega_\alpha(T)f_{k,j-1} + \omega_\alpha(2\delta) \} + \frac{3\mu^2j}{\lambda+\mu} \{ \delta^{-1}\omega_\alpha(T)f_{k-1,j} \\ &\quad + \omega_\alpha(2\delta) \} + \frac{3\lambda\mu}{\lambda+\mu} \omega_\alpha(|(s+k\lambda) - (s'+j\mu)|) \end{aligned}$$

ここで, $\frac{\lambda}{\lambda+\mu} f_{k-1,j} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} f_{k,j-1} \leq f_{k,j}$ を用いた。ところで, ω_α は非減少であるから

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(|(s+k\lambda) - (s'+j\mu)|) &\leq \delta^{-1}\omega_\alpha(T) |(s+k\lambda) - (s'+j\mu)| - |s-s'-\mu| \\ &\quad + \omega_\alpha(2\delta) \leq \delta^{-1}\omega_\alpha(T) f_{k,j-1} + \omega_\alpha(2\delta) \end{aligned}$$

この二式を合せれば, $a_{k,j}$ は (7) を満足することが示される。

おわり

定理 1 の証明 $u, v \in X_\alpha$ とするとき, (7) 式により

$$\begin{aligned} &\limsup_{\lambda, \mu \downarrow 0} \left\| \prod_{i=1}^{\lfloor \frac{t-s}{\lambda} \rfloor} J_\lambda(s+i\lambda) u - \prod_{i=1}^{\lfloor \frac{t'-s'}{\mu} \rfloor} J_\mu(s'+i\mu) v \right\| \\ &\leq \|J_\varepsilon(0)u - u\| + \|J_\varepsilon(0)u - v\| + (\|A_\varepsilon(0)u\| + 3\omega_\alpha(T)) \times \\ &\quad |(t-s) - (t'-s')| + 3T \{ \delta^{-1}\omega_\alpha(T) |(t-s) - (t'-s')| + \omega_\alpha(2\delta) \} \end{aligned}$$

がすべての $\varepsilon > 0$, $|s-s'| < \delta \leq T/2$ に対して成立する。ここで, $t=t', s=s'$ とおき, $\varepsilon \downarrow 0, \delta \downarrow 0$ とすると, (6) (b) そして (c) が X_0 上で成り立つ。したがって, 連続的にこれらの性質は $Y=\bar{X}_0$ 上に拡張される。最後に, (d) は補題 1 より, (a) は (b) より容易に分る。

おわり

§3. 応用

一階準線型偏微分方程式

$$(8) \quad \begin{cases} u_t(t, x) + \phi(t, u(t, x))x = 0, & 0 \leq t \leq T, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

に対して, 定理1を応用する。

 $X = L^1(\mathbb{R})$ とおく。 $u \in L^1(\mathbb{R})$ に対して

$$(9) \quad \begin{cases} P_1(u) = \|u\|_\infty, & P_2(u) = \sup_{h \neq 0} |h|^{-1} \int_{\mathbb{R}} |u(x+h) - u(x)| dx \\ P(u) = P_1(u) + P_2(u) \end{cases}$$

とおく。 P_1, P_2 したがって, P は X 上で l.s.c. である。この P に対して, X_α, X_0 を (3) で定義する。このとき, $Y = \overline{X_0} = L^1(\mathbb{R})$ である。 ϕ に対して, 次の仮定をおく。(φ₁) $\phi(t, \xi), \phi_\xi(t, \xi)$ は $[0, T] \times \mathbb{R}$ 上で連続(φ₂) $\phi(t, 0) = 0, \quad t \in [0, T]$ 。次に, $h, l > 0$ に対して, 作用素 $C_{h,l}(t)$ を

$$[C_{h,l}(t)u](x) = \frac{1}{2}(u(x+l) - u(x-l)) - \frac{h}{2l}[\phi(t, u(x+l)) - \phi(t, u(x-l))]$$

と定義する。 $M_\alpha = \max\{|\phi_\xi(t, \xi)|; t \in [0, T], |\xi| \leq \alpha\}$ とおき, δ_α を $0 < \delta_\alpha < 1/M_\alpha$ とし, 数列 $\{h_{\alpha,n}\}, \{l_{\alpha,n}\}$ を

$$h_{\alpha,n} \rightarrow 0, \quad l_{\alpha,n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$\delta_\alpha \leq h_{\alpha,n}/l_{\alpha,n} \leq 1/M_\alpha$$

であるようにとる。このとき

$C_{\alpha,n}(t) = C_{h_{\alpha,n}, l_{\alpha,n}} | X_{\alpha}$, $A_{\alpha,n}(t) = h_{\alpha,n}^{-1} (C_{\alpha,n}(t) - I)$
と定義する。次の補題は Oharu-Takahashi [6] による。

補題 4. 各 $t \in [0, T]$ に対して, 次の性質をもつ X の
dissipative 作用素が存在する。

$$(i) \quad C_0^1(\mathbb{R}) \subset D(A(t)), \quad \text{したがって} \quad \overline{D(A(t))} = X$$

$$(ii) \quad R(I - \lambda A(t)) = L^1 \cap L^{\infty} \supset X_0, \quad \lambda > 0$$

$$J_{\lambda}(t)u = (I - \lambda A(t))^{-1}u = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - \lambda A_{\alpha,n}(t))^{-1}u, \quad u \in X_{\alpha}$$

$$(iii) \quad P_i(J_{\lambda}(t)u) \leq P_i(u), \quad u \in X_0, \quad i = 1, 2.$$

$$(iv) \quad P_1(u) \leq \alpha, \quad |k| \leq \alpha, \quad f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}), \quad f \geq 0 \quad \text{ならば}$$

$$(10) \quad < |J_{\lambda}(t)u - k| - |u - k|, f >$$

$$\leq \lambda < \text{sign}(J_{\lambda}(t)u - k)(\phi(t, J_{\lambda}(t)u) - \phi(t, k), f_x >$$

補題 5. $\{A(t)\}_{t \in [0, T]}$ を補題 4 より定まる作用素族とし,
 P を (10) により定義された X 上の汎関数とする。この
とき, 定理 1 の条件 (I), (II), (III) は満たされる。

証明 (I), (II) は補題 4 より明らかである。今

$$\omega_{\alpha}(r) = \alpha \sup \{ |\phi_3(t, \xi) - \phi_3(s, \xi)|; |s - t| \leq r, |\xi| \leq \alpha \}$$

とおく。 $u \in X_{\alpha}$ とし, $v = (I - \lambda A_{\alpha,n}(t))^{-1}u$ とおくと

$$\| (I - \lambda A_{\alpha,n}(t))^{-1}u - (I - \lambda A_{\alpha,n}(s))^{-1}u \|$$

$$\leq \lambda \| A_{\alpha,n}(s)v - A_{\alpha,n}(t)v \|$$

$$= \frac{\lambda}{2\ell} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{v(x-\ell)}^{v(x+\ell)} \{ \phi_3(s, \xi) - \phi_3(t, \xi) \} d\xi \right| dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq (\lambda/2\ell\alpha) \omega_\alpha(1s-t1) \int_{\mathbb{R}} |v(x+\ell) - v(x-\ell)| dx \\
&\leq (\lambda/2\ell\alpha) \omega_\alpha(1s-t1) 2\ell P_2(v) \\
&\leq \lambda \omega_\alpha(1s-t1)
\end{aligned}$$

ここで, $n \rightarrow \infty$ とすれば, 補題4(ii) より

$$\|J_\lambda(t)u - J_\lambda(s)u\| \leq \lambda \omega_\alpha(1s-t1)$$

が成立する。したがって, (III) が満たされる。 おわり。

この補題から, 作用素族 $\{A(t)\}$ に対して, evolution operator $\{U(t,s); 0 \leq s \leq t \leq T\}$ が $X = L^1(\mathbb{R})$ 上で存在する。このとき, 次の定理が成り立つ。

定理2. $u_0 \in L^1 \cap L^\infty$ に対して, $u(t,x) = [U(t,0)u_0](x)$ は方程式 (8) の Kružkov [4] の意味の一般解である。すなわち, $u(t,x) \in L^\infty(\mathbb{R})$, $t \in [0, T]$ であり, かつ, すべての $k \in \mathbb{R}$, $f \in C_0^\infty((0, T] \times \mathbb{R})$, $f \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned}
(11) \quad &\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \{ |u(t,x) - k| f_t(t,x) + \text{sign}(u(t,x) - k) [\phi(t, u(t,x)) \\
&\quad - \phi(t, k)] f_x(t,x) \} dx dt \geq 0
\end{aligned}$$

この証明は補題4(iv)を用いることによりなされる。

謝辞. 多くの有益な助言をいただいた, 高橋氏 および宮寺, 大倉両先生に対し感謝いたします。

文献

[1] M. Crandall-T. Liggett; Generation of semigroups of nonlinear transformations on general Banach

spaces, Amer. J. Math., 93 (1971), 265-298.

[2] M. Crandall-A. Pazy; Nonlinear evolution equations in Banach spaces, Israel J. Math., 11. (1972), 57-94

[3] Y. Kobayashi; Difference approximation of Cauchy problems for quasi-dissipative operators and generation of nonlinear semigroups, J. Math. Soc. Japan, 27 (1975), 640-665

[4] S. Kružkov; First-order quasi-linear equations in several independent variable, Math. USSR Sbornik 10 (1970), 217-243

[5] S. Oharu; On the semigroup approach to nonlinear partial differential equations of first order, I, to appear.

[6] S. Oharu-T. Takahashi; A convergence theorem of nonlinear semigroups and its application to first-order quasilinear equations, J. Math. Soc. Japan, 26 (1974), 124-160